

# 非匀速落球法测流体的粘滞系数

各种实际液体具有不同程度的粘滞性，当液体流动时，平行于流动方向的各层流体速度都不相同，即存在着相对滑动，于是在各层之间就有摩擦力产生，这一摩擦力称为粘滞力，它的方向平行于接触面，其大小与速度梯度及接触面积成正比，比例系数 $\eta$ 称为粘度，它是表征液体粘滞性强弱的重要参数。

测量液体粘度有多种方法，如有毛细管法、奥氏粘度计法、落球法、转筒法等<sup>[1][2]</sup>，本实验所采用的落球法是基于小球运动学方程测量液体的粘度。如果一个小钢球在粘滞液体中铅直下落，由于附着于球面的液层与周围其他液层之间存在着相对运动，因此小钢球受到粘滞阻力，它的大小与小钢球下落的速度有关。由小球在液体中的运动学方程，保证在可忽略湍流的情况下测出相对于液面的位移和位移的时间，就可求出液体的粘滞系数。

## 一、实验创新点

- (1) 克服传统落球法只能测大粘度液体的粘滞系数的限制;
- (2) 克服传统落球法中匀速运动区域的选择问题;
- (3) 用现有落球法装置，结合科学计算工具 Matlab 软件进行实验处理，培养学生科研实践的能力。

## 二、实验目的

(1) 观察液体的内摩擦现象，应用斯托克斯定律，探究小钢球以非匀速状态在液体中运动，用落球法测量液体的粘滞系数。

(2) 验证小钢球在非匀速状态时用落球法测量各种液体的粘滞系数是否适用。

## 三、实验仪器

螺旋测微器、游标卡尺、直尺、电子天平、1000ml 量筒、小钢球若干、镊子、待测液体（精制蓖麻油、纯净水）、比重计、温度计、FB328A 型金属探测法粘滞系数仪、FB213A 型数显计时计数毫秒仪。

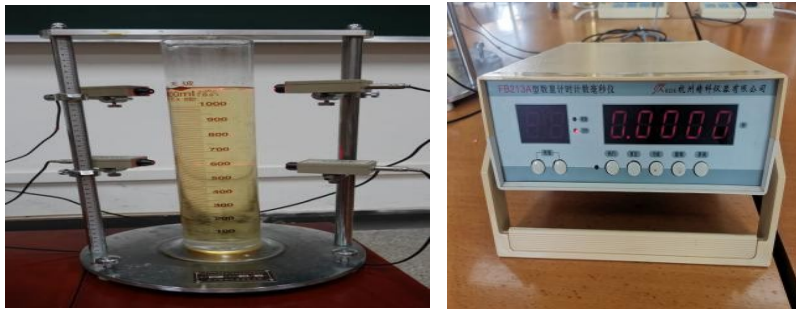


图 1. 实验设备实物图（左右两图）



图 2. 电子天平实物图



图 3. 镊子、烧杯、小钢球实物图

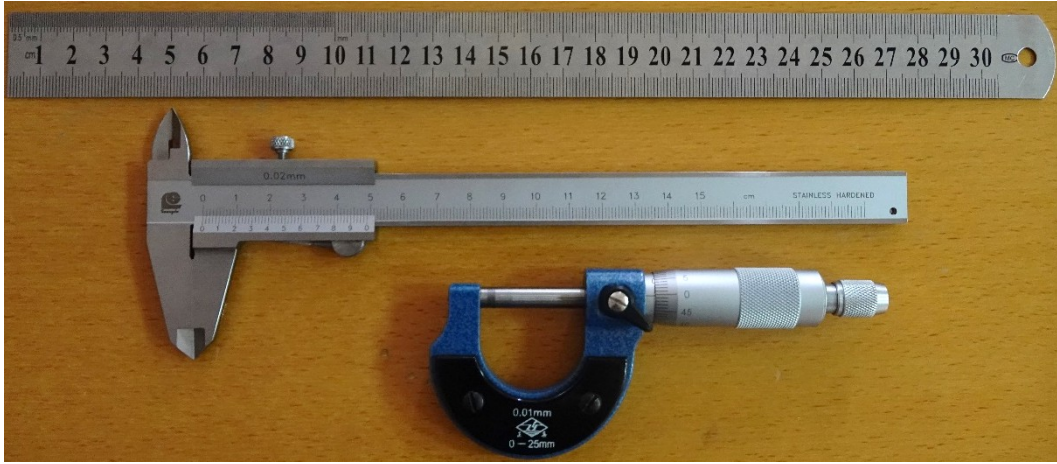


图 4. 钢直尺、游标卡尺、螺旋测微器实物图



图 5. 比重计、温度计实物图

#### 四、实验原理

当半径为  $r$  的光滑圆球,以速度  $v$  在均匀的无限宽广的液体中运动时,若速度不大,球也很小,在液体中不产生涡流的情况下,斯托克斯指出,球在液体中所受到的阻力为  $6\pi\eta rv$ , 式中  $\eta$  为液体的黏度,此式称为斯托克斯公式。

当质量为  $m$ 、体积为  $V$  的小钢球在密度为  $\rho$  的液体中下落时,作用在小钢球上的力有三个, 即: ①重力  $mg$ , ②液体的浮力  $\rho gV$ , ③液体的黏性阻尼力  $6\pi\eta rv$ 。这三个力都作用在同一铅直线上,重力向下,浮力和阻力向上。故小钢球非匀速运动中合力为  $F$ , 即

$$F = mg - \rho gV - 6\pi\eta rv \quad (1)$$

令  $\eta' = 6\pi\eta r \quad (2)$

将(2)代入(1), 得

$$F = mg - \rho gV - \eta'v \quad (3)$$

由牛顿第二定律  $F = ma$  ,  $\frac{dx}{dt} = v$  ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = a$  (4)

(3) 和 (4) 相结合, 故

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \rho gV - \eta' \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

进一步转化, 得

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta' \frac{dx}{dt} = V\rho'g - \rho gV \quad (6)$$

其中  $\rho'$  为小钢球的密度

再转化, 得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\eta'}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{(\rho' - \rho)gV}{\rho'V} = \frac{(\rho' - \rho)}{\rho'} g \quad (7)$$

令  $g' = \frac{\rho' - \rho}{\rho'} g$  (8)

故  $g' = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\eta'}{m} \frac{dx}{dt}$  (9)

非齐次线性微分方程 (9) 的通解为

$$X = (A + Be^{-\frac{\eta'}{m}t}) + \frac{mg'}{\eta'} t \quad (10)$$

由初始条件  $t=0$  ,  $X=0$  ,  $v_0 = \sqrt{2gh}$  , 其中  $h$  为小钢球自由落体离液面的高度,  $v_0$  为小钢球刚进入液体时的速度, 得

$$A = -B, \quad B = \frac{m^2 g'}{\eta'^2} - mv_0 \quad (11)$$

故 
$$X = (mv_0 - \frac{m^2 g'}{\eta'^2})(1 - e^{-\frac{\eta'}{m}t}) + \frac{mg'}{\eta'}t \quad (12)$$

两边同乘  $\eta'$ , 得

$$\eta' X = (mv_0 \eta' - \frac{m^2 g'}{\eta'}) (1 - e^{-\frac{\eta'}{m}t}) + mg't \quad (13)$$

即 
$$\eta' X - mg't = (mv_0 \eta' - \frac{m^2 g'}{\eta'}) (1 - e^{-\frac{\eta'}{m}t}) \quad (14)$$

在已知  $X, t$  的情况下, 满足方程 (14) 的  $\eta'$  的解是下面两曲线交点所对应的  $\eta'$  大于零的值

$$\begin{aligned} y &= (mv_0 \eta' - \frac{m^2 g'}{\eta'}) (1 - e^{-\frac{\eta'}{m}t}) \\ y &= \eta' X - mg't \end{aligned} \quad (15)$$

利用 Matlab 进行数值计算<sup>[4]</sup>, 求出两曲线的横坐标大于零的交点, 得出  $\eta'$ , 再由 (2) 可求出  $\eta$ 。

由于液体在容器中, 不满足无限宽广的条件, 这时实际测得的速度  $V_0$  和上述式中的理想条件下的速度之间存在如下关系:

$$v = v_0 (1 + 2.4 \frac{r}{R}) (1 + 3.3 \frac{r}{H}) \quad (16)$$

式中  $R$  为盛液体量筒的内半径,  $H$  为筒中液体的深度。(注: 这里的  $V_0$  是指在量筒中液体内测得的小刚球的瞬时速度。)

因此修正后的粘滞系数为

$$\eta_{\text{修}} = \frac{\eta'}{6\pi r (1 + 2.4 \frac{r}{R}) (1 + 3.3 \frac{r}{H})} \quad (17)$$

## 五、实验内容及步骤



图 7. 实验仪器实物图

### (1) 调节粘滞系数测量装置及实验仪器

- ① 调节底盘水平，在仪器横梁中间部位放重锤部件；调节底盘旋钮使重锤对准底盘的中心圆点。
- ② 接通电源，将实验架上的两激光器接通到 FB213A 型数显计时计数毫秒仪中，调节两个光电门的距离，并使红色激光束平行且正对准铅锤线。
- ③ 收回重锤部件，将盛有待测液体的量筒放置到实验架底盘中央，增加或减少待测液体的量，使其液面和第一个光电门的高度相同且使激光束刚好掠过液面，实验过程中保持位置不变。
- ④ 使镊子经过上下光电门，观察毫秒计计时是否正常；如不正常，则适当调整光电门位置使其达成为止。

(2) 取 20 个规格相同的小钢球，称其质量 5 次，取平均值，再除以 20，可得一个小钢球的质量  $m$ ；在 20 个规格相同的小钢球中随机取出 5 个小球，测量其直径  $d$ ，取平均值后，把小钢球浸泡在待测油中

待用。

(3) 用比重计测量待测液体的密度  $\rho$ ，在全部小钢球下落完成后再测一次，取其平均值。

(4) 用温度计测量待测液体的温度  $T$ ，在全部小钢球下落完后再测一次，取其平均值。

(5) 将五个小钢球依次投放量筒中，读每个小钢球下落时计时器的示数可得小钢球下落时间  $t$ ，取其平均。

(6) 测量两光电门之间的距离  $x$ 。

(7) 测量小钢球自由落体离液面的高度  $h$ (横梁到第一个光电门的距离)，求出小球进入液体的初速度。

(8) 测量量筒的内径  $D$  和液体的高度  $H$ 。

(9) 计算待测液体的粘滞系数  $\eta_{\text{修}}$ 。

## 六、实验数据记录

表 1. 基本数据

本地重力加速度 $g$ ( $m/s^2$ )	9.78753
蓖麻油的密度 $\rho$ ( $g/cm^3$ )	0.954
蓖麻油的高度 $H_1$ ( $cm$ )	39.00
水的密度 $\rho$ ( $g/cm^3$ )	0.995
水的高度 $H_2$ ( $cm$ )	39.00
小钢球自由落体的高度 $h$ ( $cm$ )	4.03

蓖麻油的具体实验数据:

表 2. 小钢球的质量

物理量	1	2	3	4	5	平均值
小钢球的质量 $m$ (g)	0.2495	0.2495	0.2495	0.2495	0.2490	0.2494

表 3. 量筒内径

物理量	1	2	3	平均值
量筒的内径 $D$ (mm)	67.16	67.06	66.44	66.88

表 4. 小钢球的直径

物理量	1	2	3	4	5	平均值
小钢球的直径 $d$ (mm)	3.934	3.926	3.924	3.930	3.926	3.9280

表 5. 小球在油中下落的时间

两光电门的距离:20cm						
物理量	1	2	3	4	5	平均值
小球下落时间 (s)	1.8027	1.8116	1.7983	1.7900	1.7941	1.79934
两光电门的距离:15cm						
物理量	1	2	3	4	5	平均值
小球下落时间 (s)	1.4788	1.4829	1.4417	1.4541	1.4541	1.46232
两光电门的距离:10cm						
物理量	1	2	3	4	5	平均值
小球下落时间 (s)	0.8194	0.8317	0.8292	0.8206	0.8234	0.82486

水的具体实验数据:

表 6. 小钢球的质量

物理量	1	2	3	4	5	平均值
小钢球的质量 m(g)	0.2495	0.2495	0.2495	0.2490	0.2490	0.24930

表 7. 量筒的数据

物理量	1	2	3	平均值
量筒的内径 D(mm)	65.50	65.40	65.50	65.460

表 8. 小钢球的直径

物理量	1	2	3	4	5	平均值
小钢球的直径 d(mm)	3.924	3.934	3.925	3.926	3.924	3.9266

表 9. 水中小球下落时间

两光电门的距离：15cm				
物理量	1	2	3	平均值
小球下落时间(s)	0.1957	0.1822	0.1860	0.18796

## 七、实验数据处理

### 1、流体为蓖麻油的实验计算过程:

已知小球质量:  $m = 0.2494 \times 10^{-3} \text{ kg}$

两光电门的距离:  $X = 20 \text{ cm}$

小球下落的时间:  $t = 1.79934 \text{ s}$

$mV_0 = 2.215 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

$$\therefore \rho' = \frac{m_{\text{球}}}{V_{\text{球}}}, \text{ 其中 } V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi r_{\text{球}}^3$$

又  $\therefore g' = \frac{\rho' - \rho}{\rho'} \times g$ , 其中已知:  $\rho = 0.954 \text{ g/cm}^3$ ,  $g$  取  $9.78753 \text{ m/s}^2$

$\therefore$  算得:  $g' = 8.59947 \text{ m/s}^2$

将上述  $m, X, t, mV_0, g'$  的值代入 *MATLAB* 程序中进行数值求解,

得出:  $\eta' = 0.01918 \text{ pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$

$$\text{最后利用修正公式 } \eta_{\text{修}} = \frac{\eta'}{6\pi \left(1 + 2.4 \frac{r}{R}\right) \left(1 + 3.3 \frac{r}{H}\right)}$$

得:  $\eta_{\text{修}} = 0.457 \text{ pa} \cdot \text{s}$

其中  $R$  为量筒的内径,  $H$  为流体的高度。

同理可求出:

当  $t = 1.46232 \text{ s}, X = 15 \text{ cm}$  时,  $\eta' = 0.02076729 \text{ pa} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ ,  $\eta_{\text{修}} = 0.48363 \text{ pa} \cdot \text{s}$

当  $t = 0.82486 \text{ s}, X = 10 \text{ cm}$  时,  $\eta' = 0.01742241 \text{ pa} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ ,  $\eta_{\text{修}} = 0.40521 \text{ pa} \cdot \text{s}$

表 10. 蓖麻油的实验结果

两光电门的距离 (cm)	$t_1(\text{s})$	$t_2(\text{s})$	$t_3(\text{s})$	$t_4(\text{s})$	$t_5(\text{s})$	$t_p(\text{s})$	初速度 (m/s)	温度 ( $^{\circ}\text{C}$ )	$\eta'$ (pa·s·m)	测量值 $\eta_{\text{修}}$ (pa·s)	公认值 $\eta$ (pa·s) <sup>[3]</sup>	相对误差
10	0.8194	0.8317	0.8292	0.8206	0.8234	0.82486	0.8882	30.00	0.01742	0.4052	0.45	10.000%
15	1.4788	1.4829	1.4417	1.4541	1.4541	1.46232	0.8882	28.00	0.02077	0.4836	0.49	2.041%
20	1.8027	1.8116	1.7983	1.7900	1.7941	1.79934	0.8882	30.00	0.01918	0.4570	0.45	1.556%

## 2、流体为水的实验计算过程:

已知小球质量:  $m = 0.2493 \times 10^{-3} \text{ kg}$

两光电门的距离:  $X = 15 \text{ cm}$

小球下落的时间:  $t = 0.1879666 \text{ s}$

$mV_0 = 2.2143 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$

$\therefore \rho' = \frac{m_{\text{球}}}{V_{\text{球}}}$ , 其中  $V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi r_{\text{球}}^3$

又  $\therefore g' = \frac{\rho' - \rho}{\rho'} \times g$ , 其中已知:  $\rho = 0.995 \text{ g/cm}^3$ ,  $g$  取  $9.78753 \text{ m/s}^2$

$\therefore$  算得:  $g' = 8.55 \text{ m/s}^2$

将上述  $m, X, t, mV_0, g'$  的值代入 *MATLAB* 程序中, 进行数值计算求解

得:  $\eta' = 0.277148 \times 10^{-4} \text{ pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$

最后利用修正公式:  $\eta_{\text{修}} = \frac{\eta'}{6\pi \left(1 + 2.4 \frac{r}{R}\right) \left(1 + 3.3 \frac{r}{H}\right)}$ ,

得,  $\eta_{\text{修}} = 0.643955 \times 10^{-3} \text{ pa} \cdot \text{s}$

其中  $R$  为量筒的内径,  $H$  为流体的高度。

表 11. 水的实验结果

两光电门的距离(cm)	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)	$t_3$ (s)	$t_p$ (s)	初速度(m/s)	温度(°C)	$\eta'$ ( $\text{pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$ )	测量值 $\eta_{\text{修}}$ ( $\text{pa} \cdot \text{s}$ )	公认值 $\eta$ ( $\text{pa} \cdot \text{s}$ ) <sup>[1]</sup>	相对误差
15	0.1957	0.1822	0.1860	0.18796	0.8882	29.00	$0.27714 \times 10^{-4}$	$0.6439 \times 10^{-3}$	$0.818 \times 10^{-3}$	21.3%

## 八、实验结果分析

对于蓖麻油，由表 10.的数据可分析出，两光电门距离为 15cm 之内时，粘滞系数测量值小于公认值，是湍流影响小，误差主要来自计时和偏离主轴下落及其他测量的误差。距离 20cm 时，说明湍流影响加大占主要因素，故测量值大于公认值。但距离在 15~20cm 之间时相对误差为约 2%，距离小于等于 10cm 时相对误差为大于 10%，距离大于 20cm 时，测量值随距离的增大而逾加大于公认值，相对误差会比 2%大得多。

对于水，常温下水的粘滞系数很小，落球在水中极易产湍流，故要控制在合适的距离进行测量以忽略湍流的影响。两光电门距离小于 10cm 时，测不出粘滞系数(0 结果)，是由于粘滞力累积不出其影响。从表 11.看出，距离大于等于 15cm 时，粘滞系数测量值大于公认值，且相对误差约为 20%，说明湍流已经很厉害，忽略湍流会导致实验测量结果失信。另外，水的粘度测量受计时器高精度及小球沿中轴线的严格落下的苛刻要求，实现在短距离下测量并获得较好的实现结果不太容易成功。

## 九、误差分析

- 1.该实验对时间精度要求精度很高，失之毫厘，谬以千里。
- 2.落球时手不稳定，对于粘度较小的流体容易偏移中心轴，不容易记录测量的数据。
- 3.温度对液体的黏度系数影响较大。故需在开始投放同一规格小钢球

前和结束投放同一规格小钢球后，用温度计测量其温度，确保在投放同一规格小钢球过程中，液体的温度保持不变，减小实验误差。

#### 4.对粘度很小的流体不能忽略湍流的影响

## 十、展望

该方案在半径约 2mm 的小钢球从离液面高约 4cm 处沿中轴线自由落下的情况下，忽略湍流的影响，选择从液面开始至深度约为 15cm~20cm 的流体内，用落球可测量粘度从水(28℃)到大于或类似于蓖麻油(30℃)的透明或半透明流体的粘滞系数。粘度越强的流体，选择实验距离(根据落球时间与 30℃ 下的蓖麻油比较)就应越接近 20cm; 粘度越小，则应选择愈接近 15cm。这样，实验精度(相对误差)越近 2%;与 28℃ 水粘度接近的流体，实验精度会比这一温度下水的实验精度要高。

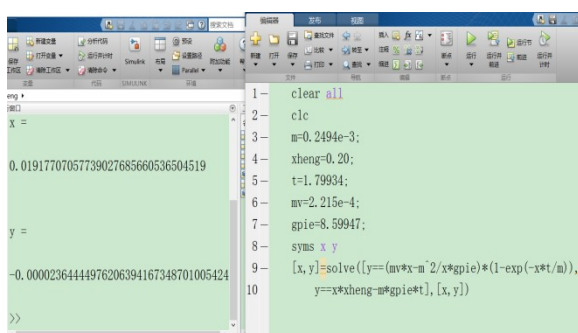
如果能有更高精度的计时器，或恒温设备，精度会进一步提高，该方案可推广运用。

## 参考文献:

- [1] 杨述武等.普通物理实验（1）力学、热学部分（第五版），高等教育出版社，2018.
- [2] 落球法测定液体粘滞系数（FB328A 型液体粘滞系数测定仪）（多功能光电传感器计时）实验讲义.杭州精科仪器有限公司，2013 年.
- [3] 蓖麻油粘滞系数公认值表.百度文库.
- [4] 李海涛，邓樱.MATLAB 程序设计教程，高教出版社，2002 年.

## 附录:

- [1] MATLAB 计算蓖麻油  $\eta'$  的截图:



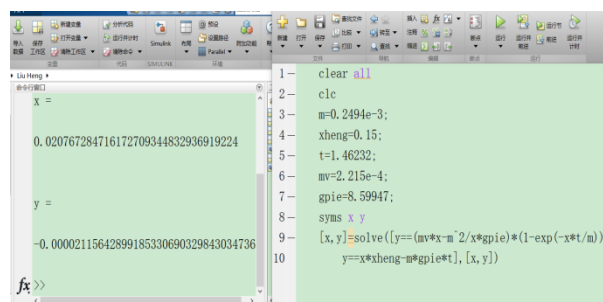
```
1- clear all
2- clc
3- m=0.2494e-3;
4- xheng=0.20;
5- t=1.79934;
6- mv=2.215e-4;
7- gpie=8.59947;
8- syms x y
9- [x,y]=solve([y==(mv*x-m^2/x*gpie)*(1-exp(-x*t/m)),
10- y==x*xheng-m*gpie*t],[x,y])
```

输出结果:

```
X =
0.01917707057739027685660536504519

y =
-0.00002364444976206394167348701005424
```

两光电门间的距离 X: 20.00cm



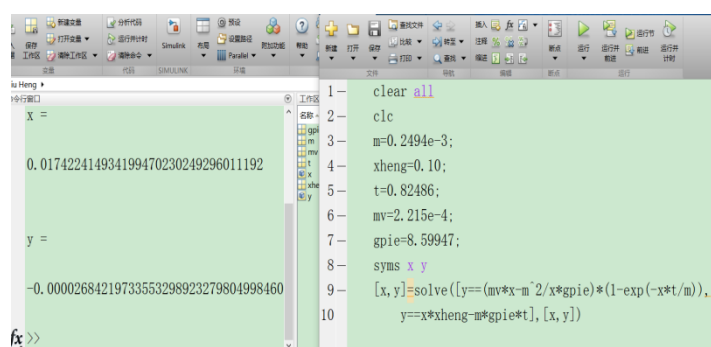
```
1- clear all
2- clc
3- m=0.2494e-3;
4- xheng=0.15;
5- t=1.46232;
6- mv=2.215e-4;
7- gpie=8.59947;
8- syms x y
9- [x,y]=solve([y==(mv*x-m^2/x*gpie)*(1-exp(-x*t/m)),
10- y==x*xheng-m*gpie*t],[x,y])
```

输出结果:

```
X =
0.020767284716172709344832936919224

y =
-0.00002115642899185330690329843034736
```

两光电门间的距离 X: 15.00cm



```
1- clear all
2- clc
3- m=0.2494e-3;
4- xheng=0.10;
5- t=0.82486;
6- mv=2.215e-4;
7- gpie=8.59947;
8- syms x y
9- [x,y]=solve([y==(mv*x-m^2/x*gpie)*(1-exp(-x*t/m)),
10- y==x*xheng-m*gpie*t],[x,y])
```

输出结果:

```
X =
0.017422414934199470230249296011192

y =
-0.00002684219733553298923279804998460
```

两光电门间的距离 X: 10.00cm

- [2] MATLAB 计算水  $\eta'$  的截图:

```

1 clear all
2 clc
3 m=0.2493e-3;
4 xheng=0.15;
5 t=0.18796666;
6 mv=2.214e-4;
7 gpie=8.55;
8 syms x y
9 [x,y]=solve((y==(mv*x-m^2/x*gpie)*(1-exp(-x*t/m))),
10 y==x*xheng-m*gpie*t],[x,y])

```

两光电门间的距离 X: 15.00cm

### [3] 蓖麻油粘滞系数公认值表

附表 4-4 不同温度下蓖麻油的黏滞系数

T ℃	$\eta$ Pa·s	T ℃	$\eta$ Pa·s	T ℃	$\eta$ Pa·s	T ℃	$\eta$ Pa·s	T ℃	$\eta$ Pa·s
4.5	4.00	13.0	1.87	18.0	1.17	23.0	0.75	30.0	0.45
6.0	3.46	13.5	1.79	18.5	1.13	23.5	0.71	31.0	0.42
7.5	3.03	14.0	1.71	19.0	1.08	24.0	0.69	32.0	0.40
9.5	2.53	14.5	1.63	19.5	1.04	24.5	0.64	33.5	0.35
10.0	2.41	15.0	1.56	20.0	0.99	25.0	0.60	35.5	0.30
10.5	2.32	15.5	1.49	20.5	0.94	25.5	0.58	39.0	0.25
11.0	2.23	16.0	1.40	21.0	0.90	26.0	0.57	42.0	0.20
11.5	2.14	16.5	1.34	21.5	0.86	27.0	0.53	45.0	0.15
12.0	2.05	17.0	1.27	22.0	0.83	28.0	0.49	48.0	0.10
12.5	1.97	17.5	1.23	22.5	0.79	29.0	0.47	50.0	0.06