第3章 一维势场中的粒子

第一节 一维势场中粒子能量本征态的一般性质

定态薛定谔方程（能量的本征方程）

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)=EV(x)$$

定理1：设$\psi(x)$是定态薛定谔方程的一个解，对应的能量本征值为E，则$\psi^*(x)$也是薛定谔方程的一个解，能量也是E.

证明：$\because V^*(x)=V(x)$，$E^*=E,(\frac{\hbar^2}{2m})^*=\frac{\hbar^2}{2m},(\frac{d^2}{dx^2})^*=\frac{d^2}{dx^2}$

$$\therefore \quad [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)]^*=[EV(x)]^*$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi^*(x)}{dx^2}+V(x)=EV(x)$$

显然，$\psi^*(x)$也是能量为E的定态薛定谔方程的一个解。

定理2：

对应能量的某个本征值 E,总可以找到定态薛定谔 方程的一组实数解，凡属于E的任何解，均可表示为 这一组实数解的线性叠 加。

证明：设$\varphi^* = \varphi$，$\phi^* = \phi$，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi = E\varphi, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi = E\phi$$

$\psi = a\psi + b\phi$， a, b为复常数

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi + V(x)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}(a\varphi + b\phi) + V(x)(a\varphi + b\phi)$$

$$= a[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi + V(x)\varphi] + b[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi + V(x)\phi]$$

$$= aE\varphi + bE\phi = E(a\varphi + b\phi) = E\psi.$$

$$\therefore \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi + V(x)\psi = E\psi$$

显然，$\psi(x)$也是能量为E的定态薛定谔方程的一个解。

定理3：

设$V(-x)=V(x),\psi(x)$是能量为 E的定态薛定谔方程的解 ，

则$\psi(-x)$也是能量为 E的定态薛定谔方程的解 。

证明：$\because\ V(-x)=V(x),\frac{d}{d(-x)}=-\frac{d}{dx},\frac{d}{d(-x)}=\frac{d^2}{d(-x)^2}=\frac{d}{d(-x)}\frac{d}{d(-x)}=\frac{d^2}{dx^2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

令$x\to -x$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d(-x)^2}\psi(-x)+V(-x)\psi(-x)=E\psi(-x)$$

$$\therefore\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(-x)+V(x)\psi(-x)=E\psi(-x)$$

显然，如$V(-x)=V(x)$,则$\psi(-x)$也是能量为E的定态薛定谔方程的一个解。

讨论：如能量E无简并，则$\psi(x)$与$\psi(-x)$描述同一状态，即

$$\psi(-x)=c\psi(x)\Rightarrow\psi(--x)=c\psi(-x)=c^2\psi(x)$$

$$c^2=1\Rightarrow c=\pm1 \quad \Longrightarrow \quad \psi(-x)=\begin{cases}\psi(x),\text{偶宇称}\\ -\psi(x),\text{奇宇称}\end{cases}$$

定理4：对于$V(-x)=V(x)$,对应能量的某个本征值 E,总可以找到定态薛定谔方程的一组 解(每个解都有确定的宇称)，凡属于E的任何解，均可表示为 这一组解的线性叠加。

证明：$\phi(-x)=\phi(x),\varphi(-x)=-\varphi(x)$

则 $\psi(x)=a\phi(x)+b\varphi(x)$为方程的解

讨论:(1) $\psi(-x)=\psi(x)$,则$a\neq0$(例$a=1$),$b=0$

(2) $\psi(-x)=-\psi(x)$,则$a=0,0,b\neq0$(例$b=1$)

(3) $\psi(-x)\neq\pm\psi(x)$,则$a\neq0,b\neq0$(例$a=b=\frac{1}{2}$)

定理5：

对于阶梯形方位势 $V(x)=\begin{cases} V_1, & x<a \\ V_2, & x\geq a \end{cases}$，$V_2-V_1$有限，

则能量本征函数 $\psi(x)$及其导数 $\psi'(x)$必定连续。

（但如$\left|V_2-V_1\right|\to\infty$，则此定理不成立。）

证明：$\because\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$, 设$\varepsilon>0$, 且$\varepsilon\to 0$, $\therefore$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx=-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(E-V(x))\psi(x)dx$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx+\int_{a}^{a+\varepsilon}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx=-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a}(E-V_1)\psi(x)dx-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a}^{a+\varepsilon}(E-V_2)\psi(x)dx$$

$$\psi'(a)-\psi'(a-\varepsilon)+\psi'(a+\varepsilon)-\psi'(a)$$

$$=-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a}(E-V_1)\psi(x)dx-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a}^{a+\varepsilon}(E-V_2)\psi(x)dx$$

$\because\ \psi(x)$有限，$\varepsilon\to 0$, $\therefore$

$$\psi'(a+0^+)-\psi'(a-0^+)=0\Rightarrow\psi'(a+0^+)=\psi'(a-0^+)=\psi'(a)$$

$$\Rightarrow\psi(a+0^+)=\psi(a-0^+)=\psi(a).$$

定理6：

对于一维粒子，设$\psi_1(x)$与$\psi_2(x)$均为定态薛定谔方程的属于同一能量E的解，则$\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1'=$常数（与$x$无关）。

证明：$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_1+V\psi_1=E\psi_1$， $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_2+V\psi_2=E\psi_2$

$$\psi_1''=\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi_1,\quad \psi_2''=\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi_2$$

$$\psi_2\psi_1''=\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi_2\psi_1,\quad \psi_1\psi_2''=\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi_1\psi_2$$

$$\therefore\ \psi_1\psi_2''-\psi_2\psi_1''=0$$

即 $(\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1')'=0\Rightarrow\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi'=$常数（与$x$无关）

定理7：

设粒子在规则势场$V(x)$（$V(x)$无奇点）中运动，如存在束缚态，则必定是不简并的。

证明：假设有两个简并束缚态ψ_1和ψ_2.

则由定理6得，$\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' = c, c$为与$x$无关的常数。

$\because x \to \pm\infty, \psi_1 = 0, \psi_2 = 0,$ 故$c = 0.$

$$\therefore \quad \frac{\psi_2'}{\psi_2} = \frac{\psi_1'}{\psi_1} \Rightarrow \int \frac{d\psi_2}{\psi_2} = \int \frac{d\psi_1}{\psi_1},$$

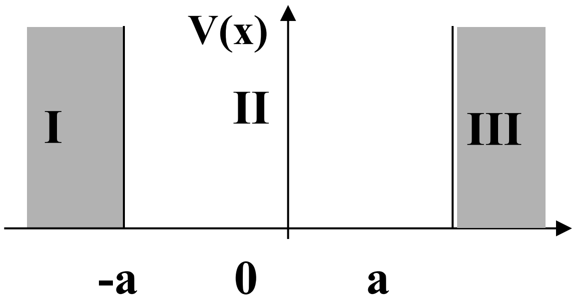
$$\ln\psi_2 = \ln\psi_1 + C_1 \Rightarrow \psi_2 = Ae^{\ln\psi_1 + C_1} = e^{C_1}\psi_1。$$

即ψ_2与ψ_1描述同一状态，是不简并的。

第二节 一维无限深方势阱

一、无限深对称方势阱，离散谱

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a\\ \infty & |x|\geq a\end{cases}$$



- **求解 S — 方程 分四步：**
- **(1) 列出各势域的一维S—方程**
- **(2) 解方程**
- **(3) 使用波函数标准条件定解**
- **(4) 定归一化系数**

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)-\frac{2\mu}{\hbar^2}[V(x)-E]\psi(x)=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi^{I}(x)-\frac{2\mu}{\hbar^2}(V-E)\psi^{I}(x)=0 \qquad x\le -a$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi^{II}(x)+\frac{2\mu}{\hbar^2}E\psi^{II}(x)=0 \qquad -a<x<a$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi^{III}(x)-\frac{2\mu}{\hbar^2}(V-E)\psi^{III}(x)=0 \qquad x\ge a$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dx^2}\psi^{I}-\beta^2\psi^{I}=0\\[2ex] \dfrac{d^2}{dx^2}\psi^{II}+\alpha^2\psi^{II}=0\\[2ex] \dfrac{d^2}{dx^2}\psi^{III}-\beta^2\psi^{III}=0\end{cases} \qquad \alpha^2=\frac{2\mu E}{\hbar^2},\ \beta=\frac{2\mu(V-E)}{\hbar^2}\sim\infty$$

$$\psi^{I}(x)=A^{I}e^{\beta x}+B^{I}e^{-\beta x}\xrightarrow{\beta\sim+\infty,\psi\text{有限}}\psi^{I}(x)=0$$

$$\psi^{III}(x)=A^{III}e^{\beta x}+B^{III}e^{-\beta x}\xrightarrow{\beta\sim+\infty,\psi\text{有限}}\psi^{III}(x)=0$$

$\because V(-x)=V(x)$,故对于同一本征值 E，有偶函数解与奇函数 解。

$$\psi^{\mathrm{II}}(x)=A^{II}\sin\alpha x+B^{II}\cos\alpha x\Rightarrow\begin{cases}\text{偶函数解：}\ \psi^{\mathrm{II}}(x)=B^{II}\cos\alpha x\\ \text{奇函数解：}\ \psi^{\mathrm{II}}(x)=\mathrm{A}^{II}\sin\alpha x\end{cases}$$

（1）$\psi^{\mathrm{II}}(x)=B^{II}\cos\alpha x$

由连续性条件：$\psi^{III}(a)=\psi^{III}(a)=0$有

$$B^{II}\cos\alpha a=0\Rightarrow B^{II}\neq 0,\alpha=\frac{2n+1}{2a}\pi,E_n=\frac{(2n+1)^2\pi^2\hbar^2}{8\mu a^2},n=0,1,2,\cdots$$

非零解为：$\psi^{II}(x)=B^{II}\cos\dfrac{2n+1}{2a}\pi x,n=0,1,2,\ldots;$

n取负整数不产生新的解。

（1）$\psi^{\mathrm{II}}(x)=\mathrm{A}^{II}\sin\alpha x$

由连续性条件：$\psi^{III}(a)=\psi^{III}(a)=0$有

$$\mathrm{A}^{II}\sin\alpha a=0\Rightarrow A^{II}\neq 0,\alpha=\frac{n\pi}{a},E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2},n=1,2,\cdots$$

非零解为：

$\psi^{II}(x)=A^{II}\sin\dfrac{n\pi}{a}x,$

$n=1,2,\ldots;$

n取负整数不产生新的解。

$$\because \left.\begin{matrix} A^{II}\sin\dfrac{2n}{2a}\pi x \\ B^{II}\cos\dfrac{(2n+1)}{2a}\pi x \end{matrix}\right\} = A\sin\frac{n\pi}{2a}(x+a),$$

$$\therefore E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8a^2\mu}, \psi_n^{II}(x) = A\sin\frac{n\pi}{2a}(x+a), n = 1,2,3,...$$

$$\therefore \psi_n(x) = \begin{cases} A\sin\dfrac{n\pi}{2a}(x+a), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

由归一化条件得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*\psi_n dx = |A|^2\int_{-a}^{a}\sin^2\frac{n\pi}{2a}(x+a)dx = |A|^2 a = 1$$

取$A = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$,得归一化波函数

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\sin\dfrac{n\pi}{2a}(x+a), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

能级：$E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{8\mu a^2}$

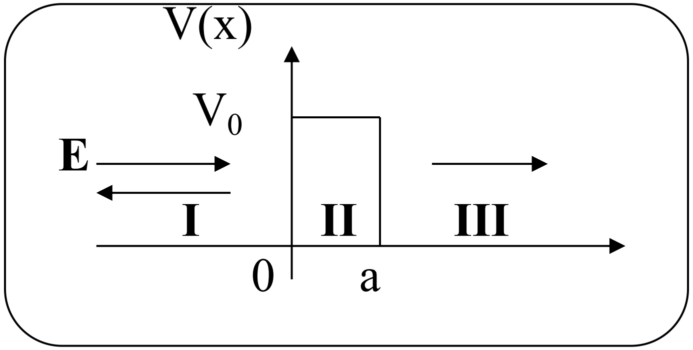
E_1(基态能），E_2(第一激发态能），

E_3（第二激发态能）,....

第三节 势垒贯穿

势垒穿透是粒子入射被势垒散射的一维运动问题。典型势垒是方势垒，其定义如下：

$$V(x)=\begin{cases}V_0 & 0<x<a\\ 0 & x<0,\quad x>a\end{cases}$$



现在的问题，是已知粒子以 能量 E 沿 x 正向入射。

（1）E ＞ V_0 情况

$$\begin{cases}\psi_1''+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi_1=0 & x<0\\ \psi_2''+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-V_0]\psi_2=0 & 0<x<a\\ \psi_3''+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi_3=0 & x>a\end{cases}$$

令： $k_1^2=\frac{2\mu E}{\hbar^2}$

$k_2^2=\frac{2\mu(E-V_0)}{\hbar^2}$

$$\begin{cases}\psi_1''+k_1^2\psi_1=0 & x<0 & I\ 区\\ \psi_2''+k_2^2\psi_2=0 & 0<x<a & II\ 区\\ \psi_3''+k_1^2\psi_3=0 & x>a & III\ 区\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_1 = Ae^{ik_1x} + A'e^{-ik_1x} \\ \psi_2 = Be^{ik_2x} + B'e^{-ik_2x} \\ \psi_3 = Ce^{ik_1x}\end{cases}$$

利用波函数标准条件来定系数。

首先，解单值、有限条件满足。

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \psi_1'(0) = \psi_2'(0);$$
$$\psi_2(a) = \psi_3(a), \psi_2'(a) = \psi_3'(a)$$

$$\begin{cases}A' - B - B' = -A \\ Be^{ik_2a} + B'e^{-ik_2a} - Ce^{ik_1a} = 0 \\ k_1A' + k_2B - k_2B' = k_1A \\ k_2Be^{ik_2a} - k_2B'e^{-ik_2a} - k_1Ce^{ik_1a} = 0\end{cases}$$

求解方程组得:

$$C = \frac{4k_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a} - (k_1-k_2)^2e^{ik_2a}}A \qquad A' = \frac{2i(k_1^2-k_2^2)\sin k_2a}{(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a} - (k_1-k_2)^2e^{ik_2a}}A$$

为了定量描述入射粒子透射势垒的几率和被 势垒反射的几率，定义透射系数和反射系数。

I **透射系数：**

透射波几率流密度与入射波几率流密度之比称为透射系数

$D = J_D/J_I$

II **反射系数：**

反射波几率流密度与入射波几率流密度之比称为反射系数

$R = J_R/J_I$

透射系数的物理意义是：描述贯穿到 $x > a$ 的 III区中的粒子在单位时间内流过垂直 x方向的单位面积的数目与入射粒子（在 $x < 0$ 的 I 区）在单位时间内流过垂直于x方向单位面积的数目之比。

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2\mu}[\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi]$$

$$J_I = \frac{i\hbar}{2\mu}[Ae^{ik_1x}\frac{d}{dx}A^*e^{-ik_1x} - A^*e^{-ik_1x}\frac{d}{dx}Ae^{ik_1x} = \frac{k_1\hbar}{\mu}|A|^2$$

$$\boldsymbol{J_R = -\frac{k_1\hbar}{\mu}|A'|^2} \qquad \boldsymbol{J_D = \frac{k_1\hbar}{\mu}|C|^2}$$

$$\boldsymbol{D = \frac{J_D}{J_I} = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2\sin^2 k_2a + 4k_1^2k_2^2}}$$

$$D + R = 1$$

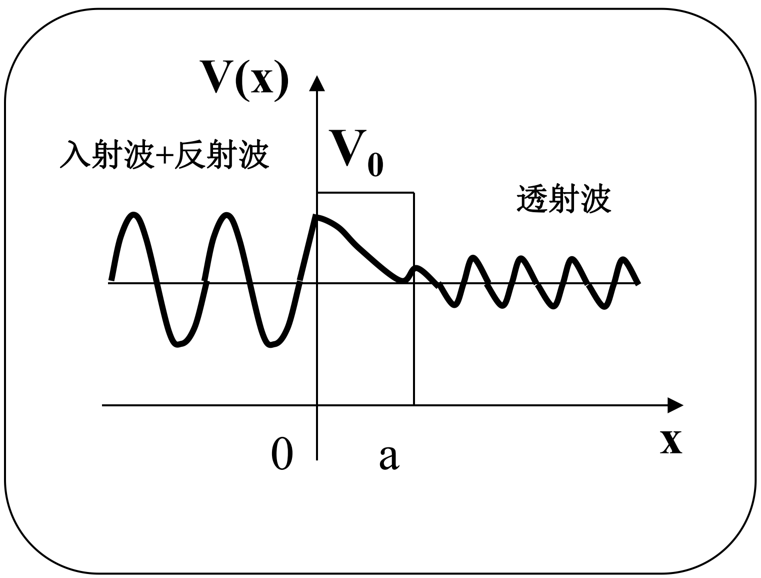
$$\boldsymbol{R = \frac{J_R}{J_I} = \frac{|A'|^2}{|A|^2} = \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2\sin^2 k_2a}{(k_1^2 - k_2^2)^2\sin^2 k_2a + 4k_1^2k_2^2}}$$

（2）E ＜ V_0情况

令：　$k_2 = ik_3$，　其中　$k_3 = [2\mu(V_0 - E)/\hbar]^{1/2}$。

$$D = \frac{4k_1^2k_3^2}{(k_1^2+k_3^2)^2\sinh^2 k_3a + 4k_1^2k_3^2} \qquad R = \frac{(k_1^2+k_3^2)^2\sinh^2 k_3a}{(k_1^2+k_3^2)^2\sinh^2 k_3a + 4k_1^2k_3^2}$$

即使 E ＜ V_0，在一般情况下，透射系数 D 并不等于零。

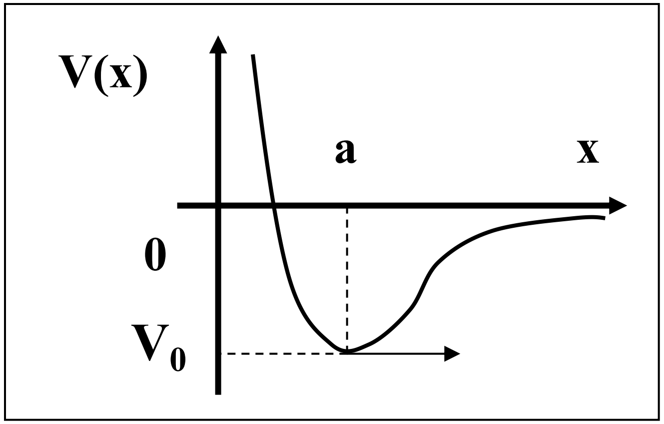


隧道效应
（tunnel effect）

粒子能够穿透比它动能更高的势垒的现象.它是粒子具有波动性的生动表现。当然，这种现象只在一定条件下才比较显著。

隧道二极管、
扫描电子显微镜,...

第四节 一维谐振子



简化 →

原子间相互作用

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

平衡位置为坐标原点，
势能零点。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2]\right\}\psi(x) = 0$$

令： $\xi = \alpha x$ **其中** $\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$, **则方程可改写为：**

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + [\lambda - \xi^2]\psi(x) = 0 \quad \textbf{其中} \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$x \to \infty \qquad \frac{d^2\psi_\infty}{d\xi^2} - \xi^2\psi_\infty = 0$$

其解为： $\psi_\infty = \exp[\pm\xi^2/2]$，

$$\because x \to \infty, \psi(\infty) \to 0, \text{故舍去} \psi_\infty = e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\therefore \quad \psi(x) = H(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0 \qquad \text{厄米方程}$$

- **其中** $H(\xi)$ **必须满足波函数的单值、有限、连续的标准条件。即：**

① **当**ξ**有限时，**$H(\xi)$**有限；**

② **当**$\xi\to\infty$**时，**$H(\xi)$**的行为要保证**$\psi(\xi)\to 0$

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp[\xi^2]\frac{d^n}{d\xi^n}\exp[-\xi^2] \qquad \text{厄米多项式}$$

$$\lambda_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega} = 2n+1 \Rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

总结：掌握

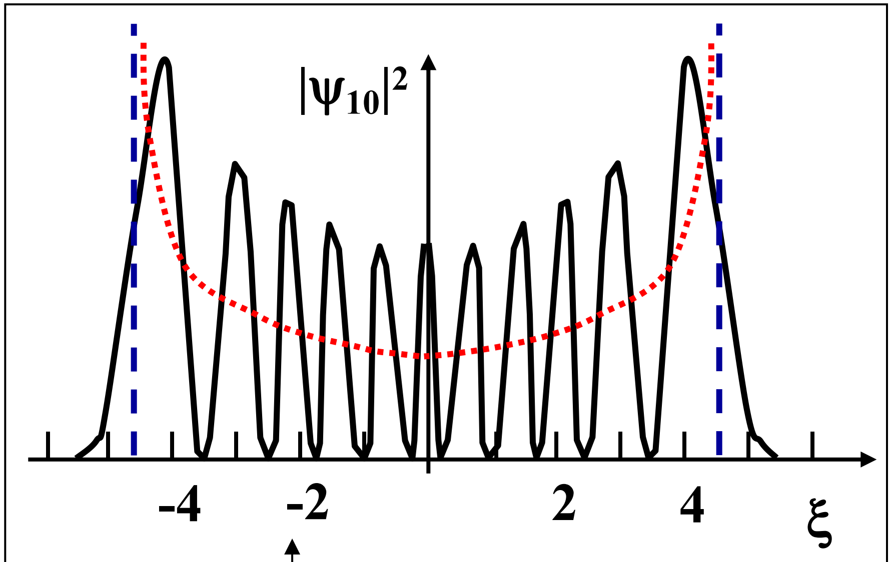
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, n = 0,1,2,\cdots$$

$$\psi_n = N_n \exp[-\tfrac{1}{2}\xi^2]H_n(\xi) \qquad \xi = \alpha x, \alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} \quad N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

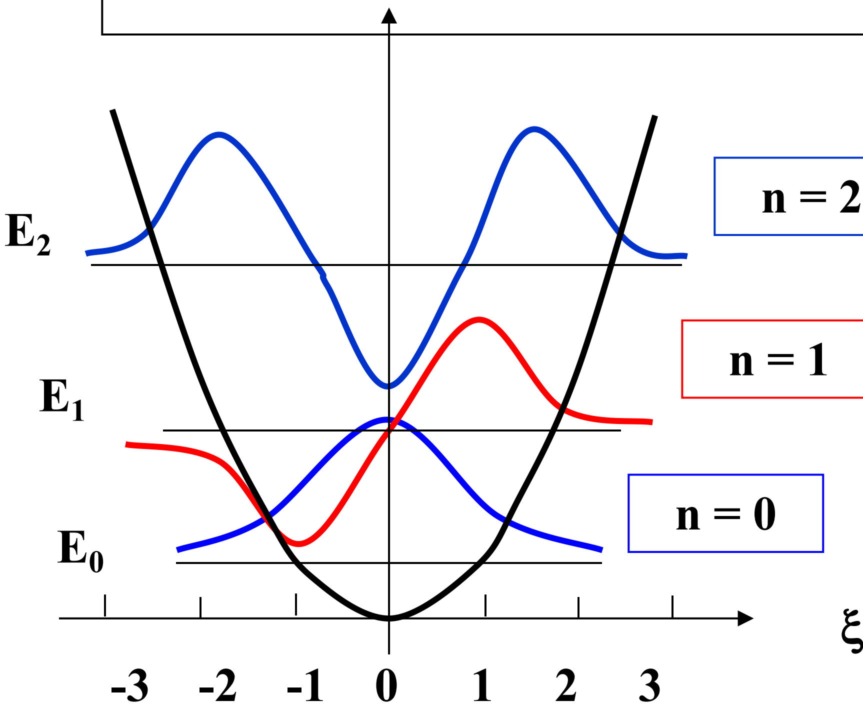
$$x\psi_n(x) = \tfrac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\tfrac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right]$$ 递推公式

特别： $H_0(\xi) = 1, H_1(\xi) = 2\xi$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)\psi_m(x)dx = \delta_{nm}$$



分析波函数可知量子力学的谐振子波函数 ψ_n 有 n 个节点，在节点处找到粒子的几率为零。而经典力学的谐振子在 [−a，a] 区间每一点上都能找到粒子，没有节点。



然而，量子情况与此不同

对于基态，其几率密度是：

$$\omega_0(\xi) = |\psi_0(\xi)|^2 = \\ = N_0^2 \exp[-\xi^2]$$

分析上式可知：一方面表明在 $\xi = 0$ 处找到粒子的几率最大；另一方面，在 $|\xi| \geq 1$ 处，即在阱外找到粒子的几率不为零，与经典情况完全不同。

第五节 δ 势

一、δ势垒贯穿

$$V=\gamma\delta(x) \qquad -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\gamma\delta(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

令$\varepsilon>0,\varepsilon\to 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx+\gamma\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)\psi(x)dx=E\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\psi(x)dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\quad d\psi'(x)+\gamma\psi(0)=2\varepsilon E\psi(-\varepsilon<\zeta<\varepsilon)$$

$\therefore \quad [\psi'(0^+)-\psi'(0^-)]=\frac{2\mu\gamma}{\hbar^2}\psi(0)$，一阶导数在 $x=0$不连续

讨论 $:0<E<\gamma$， $\gamma>0$

$$\begin{cases} \psi^{I}(x)'' + k_1^2\psi^{I}(x) = 0, \quad k_1^2 = \dfrac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad x < -\varepsilon \\ \psi^{II}(x)'' - k_2^2\psi^{II}(x) = 0, \quad k_1^2 = \dfrac{2\mu(\gamma - E)}{\hbar^2}, |x| \le \varepsilon \\ \psi^{\mathrm{III}}(x)'' + k_1^2\psi^{\mathrm{III}}(x) = 0, \quad k_1^2 = \dfrac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad x > \varepsilon \end{cases}$$

$$\psi^{I}(x) = A^{I}e^{ik_1x} + B^{I}e^{-ik_1x}, \psi^{III}(x) = A^{III}e^{ik_1x}$$

$$\psi^{II}(x) = A^{II}e^{k_2x} + B^{II}e^{-k_2x}$$

由连续条件：$\psi^{I}(-\varepsilon)=\psi^{II}(-\varepsilon), \psi^{II}(\varepsilon)=\psi^{III}(\varepsilon), \varepsilon \sim 0,$ 得

$$A^{I} + B^{I} = A^{II} + B^{II} \text{.....}(1),$$

$$A^{II} + B^{II} = A^{III} \text{......}(2)$$

由 $[\psi'(0^+)-\psi'(0^-)] = \dfrac{2\mu\gamma}{\hbar^2}\psi(0)$，得

$$ik_1A^{III} - ik_1A^{I} + ik_1B^{I} = \frac{2\mu\gamma}{\hbar^2}(A^{II} + B^{II})\text{.......}(3)$$

联立（1）、（2）、（3）解方程求得

$$A^{III} = \frac{i\hbar^2 k_1}{-\mu\gamma + i\hbar^2 k_1} A^I, \quad B^I = \frac{\mu\gamma}{-\mu\gamma + i\hbar^2 k_1}$$

透射系数：

$$\mathrm{D} = \frac{\left|A^{III}\right|^2}{\left|A^I\right|^2} = \left|\frac{i\hbar^2 k_1}{-\mu\gamma + i\hbar^2 k_1}\right|^2 = \frac{\hbar^4 k_1{}^2}{\mu^2\gamma^2 + \hbar^4 k_1{}^2} = \frac{1}{\dfrac{\mu\gamma^2}{2\hbar^3 E} + 1}$$

二、δ 势阱　　$V = \gamma\delta(x)$，$\gamma < 0$，$\mathrm{E} < 0$

$$\begin{cases} \psi^I(x)'' - k_1{}^2\psi^I(x) = 0, \quad k_1{}^2 = \dfrac{2\mu|E|}{\hbar^2}, \quad x < -\varepsilon \\ \psi^{II}(x)'' + k_2{}^2\psi^{II}(x) = 0, \quad k_2{}^2 = \dfrac{2\mu(E-\gamma)}{\hbar^2}, |x| \le \varepsilon \\ \psi^{\mathrm{III}}(x)'' - k_1{}^2\psi^{\mathrm{III}}(x) = 0, \quad k_1{}^2 = \dfrac{2\mu|E|}{\hbar^2}, \quad x > \varepsilon \end{cases}$$

$\psi^I(x) = A^I e^{k_1 x}, \psi^{III}(x) = A^{III} e^{-k_1 x}$满足 $x \to \pm\infty, \psi^I(x) = 0, \psi^{III}(x) = 0$

$\psi^{II}(x) = A^{II} e^{ik_2 x} + B^{II} e^{-ik_2 x}$

$\because \delta(-x)=\delta(x), \therefore$ 有奇、偶解。

1、奇函数数解

$$\psi^{I}(x)=A^{I}e^{k_1 x}, \quad \psi^{III}(x)=-A^{I}e^{-k_1 x}, \quad \psi^{II}(x)=B\sin k_2 x$$

由连续条件：$\psi^{I}(-\varepsilon)=\psi^{II}(-\varepsilon), \psi^{II}\varepsilon\sim 0,$ 得 $A^{I}=0$

由$[\psi'(0^+)-\psi'(0^-)]=\dfrac{2\mu\gamma}{\hbar^2}\psi(0)$，得 $\psi^{\mathrm{II}}(0)=0$

因对 k_2 给不出限制，故 $B=0$. 即奇宇称下，没束缚解 。

2、偶函数数解

$$\psi^{I}(x)=A^{I}e^{k_1 x}, \quad \psi^{III}(x)=A^{I}e^{-k_1 x}, \quad \psi^{II}(x)=B\cos k_2 x$$

由连续条件：$\psi^{I}(-\varepsilon)=\psi^{II}(-\varepsilon), \psi^{II}\varepsilon\sim 0,$ 得$A^{I}=B$

由$[\psi'(0^+)-\psi'(0^-)]=\dfrac{2\mu\gamma}{\hbar^2}\psi(0)$，得 $k_1=-\dfrac{\mu\gamma}{\hbar^2}$,

即 $E=-\dfrac{\mu\gamma^2}{2\hbar^2}$,是束缚态能级。 $\Rightarrow$

$$\boxed{\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{\hbar}{\sqrt{-\mu\gamma}}e^{k_1 x}, & x<0\\ \dfrac{\hbar}{\sqrt{-\mu\gamma}}, & x=0\\ \dfrac{\hbar}{\sqrt{-\mu\gamma}}e^{-k_1 x}, & x>0\end{cases}}$$